

DIFERENCIÁL FUNKCIE

Ak má funkcia v bode x_0 deriváciu, hovoríme, že je v bode x_0 DIFERENCOVATEĽNÁ.

Ak je f v bode x_0 diferencovateľná, je v tomto bode spojitá.

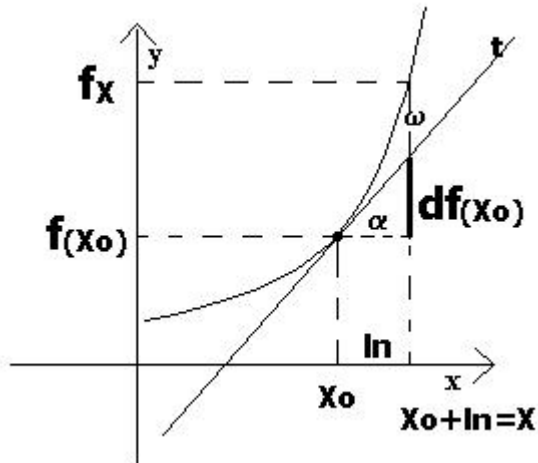
Diferencovateľnosť je silnejšia vlastnosť ako spojitosť. Opačná implikácia neplatí.

Napr. $y = |x|$ je v bode $x = 0$ spojitá, ale nemá v tomto bode deriváciu.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, potom hovoríme o derivácii funkcie f sprava v bode x_0 .

Analogicky definujeme i deriváciu zľava.

Označme stranu trojuholníka $df(x_0)$.



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{df(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow df(x_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - x_0)$$

$$df(x_0) = f'(x_0) (x - x_0).$$

Nech funkcia $f(x)$ má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$. Potom výraz $df(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$

nazývame DIFERENCIÁLOM FUNKCIE f v bode x_0 pre prírastok $\frac{x - x_0}{\Delta x}$.

PR: Vypočítajte diferenciál funkcie $y = \operatorname{tg} x$ v bode $x_0 = \frac{\pi}{3}$ pre $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

$$df\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \Delta x = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{180} = \frac{\pi}{45}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Pre rozdiel funkčných hodnôt $f(x) - f(x_0)$ platí $f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \omega$, ak $\Delta x \rightarrow 0$, potom $\omega \rightarrow 0$

Preto pre malý prírastok Δx je prírastok $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ rovný diferenciálu.

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

DERIVÁCIA A DIFERENCIÁL VYŠŠÍCH RÁDOV.

Nech funkcia f' je derivácia funkcie f na množine M . Ak funkcia f' má v nejakom bode $x_0 \in M$ deriváciu, tak túto deriváciu nazývame *druhou deriváciou* (deriváciou 2. rádu) funkcie f v bode x_0 .

$$\text{Ozn. } f''(x_0) = \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \text{ tj. } f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Postupným derivovaním (ak existujú derivácie) získame deriváciu n - tého rádu v bode x_0 .

PR: Dokážete, že platí $y'' + \varphi y' + \varphi y = 0$, ak $y = e^{-x} \cdot \sin x$

Diferenciálom rádu n funkcie $f(x)$ v číse x_0 pre prírastok $\Delta x = x - x_0$ nazývame výraz $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) (\Delta x)^n$.

PR: Nájdiť $d^2 f(x_0)$ funkcie $f(x) = e^x \cdot \cos x$ v bode $x_0 = \frac{\pi}{2}$

pre prírastok dx .

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \sin x$$

$$f''(x) = e^x \cdot \cos x - 2e^x \sin x - e^x \cos x$$

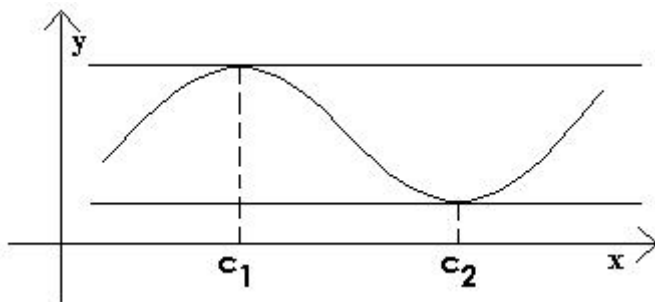
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}} \quad df\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} dx^2$$

ZÁKLADNÉ VETY DIFERENCIÁLNEHO POČTU

Veta V.17(Fermatova):

Ak funkcia f nadobúda v bode c minimálnu (maximálnu) hodnotu a má v tom bode deriváciu, tak $f'(c) = 0$.

Geometrický význam tejto vety je zrejмый:



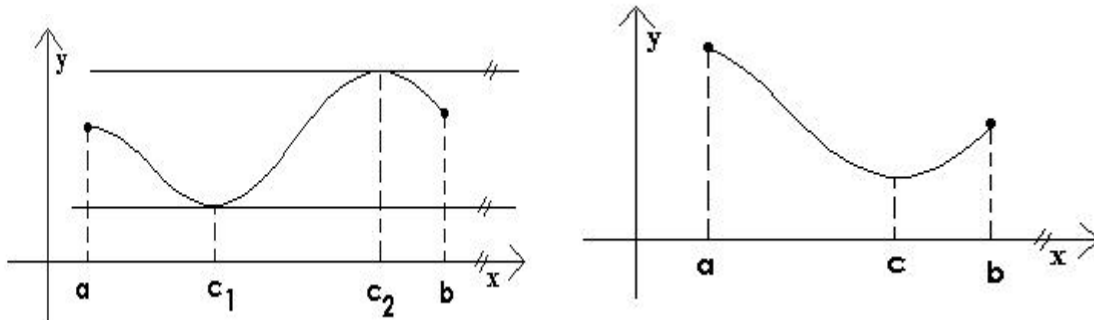
ak má funkcia deriváciu v max. (min.) bode, potom dotyčnica v tomto bode je \parallel s osou x .
tj. $\text{tg } \varphi = 0 = f'(c)$.

Veta V.18 (ROLLOVA) :

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$
2. v každom bode (a, b) má deriváciu
3. platí $f (a) = f (b)$

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ taký, že $f'(c)=0$



Nech funkcia f spĺňa predpoklady Rollovej vety, potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$, teda dotyčnica ku grafu funkcie v bode $c = (c, f(c))$ je \parallel s osou x .
Nech pre každé $x \in (a, b)$ platí : $f'(x) = 0$ potom funkcia f je konšt. na intervale (a, b) .

Z tejto vety bezprostredne vyplýva dôsledok, že pre každé x z intervalu (a, b) platí: $f'(x) = g'(x)$

Potom funkcia f a g sa na intervale (a, b) líšia o konštantu, tj. $f (x) - g (x) = c$ pre každé $x \in (a, b)$.

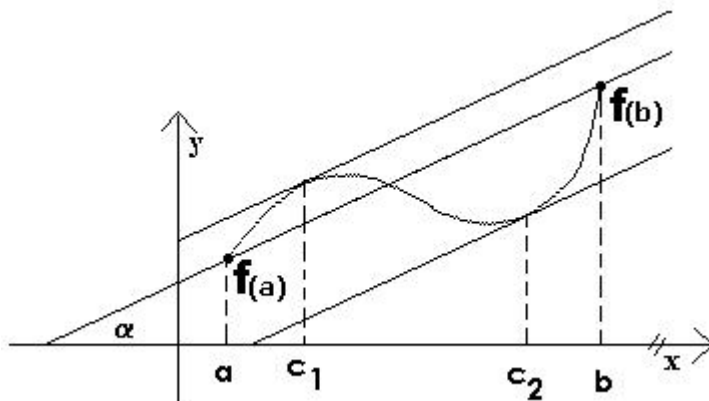
Veta V.19 (Lagrangeova veta o prírastku funkcie):

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

1. je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$
2. v každom bode (a, b) má deriváciu.

Potom existuje aspoň 1 bod $c \in (a, b)$ taký, že $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Geom. Význam Lagrangeovej vety je nasledovný:



Za daných predpokladov existuje na (a, b) aspoň jeden bod, v ktorom dotyčnica má smernicu určenú bodmi $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.

tj. $f'(c_1) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ smernica dotyčnice

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Veta V.20 (L'Hospitalovo pravidlo):

Nech: a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alebo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

b) existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vlastná alebo nevlastná.

Potom existuje aj $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

L'Hospitalovo pravidlo používame na výpočet limit neurčitých výrazov $\frac{\infty}{\infty}$ a $\frac{0}{0}$.

Limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ môžeme počítat' priamo podľa vzťahu: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

a limity typu $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ vhodnými úpravami zmeníme na typy $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{PR: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{PR: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cotg x - 1}{x} = \left(x \cotg x \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \rightarrow (\text{nech } \rightarrow 0) = \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cotg x - \frac{1}{x}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x} - x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - x}{\sin^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2 \cos x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x - \sin x - 2 \cos x - \sin x}{-2 \sin^2 x + \cos^2 x} = 0$$

TAYLOROVA VETA

Predpokladajme, že funkcia f má v bode a derivácie až do n – tého rádu.

Funkcia f môže byť veľmi zložitá. Chceli by sme ju aproximovať (nahradiť) jednoduchšou funkciou - POLYNÓMOM. O podmienkach aproximácie hovorí nasledujúca veta:

Veta V.21 (Taylorova veta):

Nech f má spojité derivácie $f', f'', \dots, f^{(n)}$ na $\langle c, b \rangle$ a spojitú deriváciu $f^{(n+1)}$ na (c, b) .

Potom pre každé $x \in \langle c, b \rangle$ platí:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_{n+1},$$

$$\text{kde } R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \text{ je zvyšok po } n \text{ – tom člene.}$$

Taylorov vzorec môžeme zapísať aj v tvare:

$f(x) = T_{n+1}(x) + R_{n+1}$, kde $T_n(x)$ je Taylorov polynóm n -tého stupňa v bode a .

Ak zvolíme v Taylorovej vete $a=0$, dostaneme *Maclaurinov vzorec*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1},$$

$$\text{kde } R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\eta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{pre } 0 < \eta < 1.$$

PR: Nájdite Maclaurinov vzorec funkcie $f(x) = e^x$

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}$$

PR : Nájdite Taylorov polynóm 4. Stupňa v bode $a = 4$ pre funkcia

$$f(x) = \ln x$$

$$f(4) = \ln 4; \quad f'(4) = \frac{1}{x} \Big|_4 = \frac{1}{4}; \quad f''(4) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Big|_4 = -\frac{1}{16};$$

$$f'''(4) = \left(\frac{2}{x^3}\right) \Big|_4 = \frac{2}{4 \cdot 16} = \frac{1}{32}; \quad f^{(4)}(4) = \left(-\frac{6}{x^4}\right) \Big|_4 = \frac{-6}{16 \cdot 16} = \frac{-3}{8 \cdot 16};$$

$$\ln x = \ln 4 + \frac{1}{1!} (x-4) - \frac{1}{2!} (x-4)^2 + \frac{41}{3!} (x-4)^3 + \frac{-3}{4!} (x-4)^4$$